A HIPÓTESE DE RIEMANN

FERNANDO FERREIRA

Fixemos um número real $x > 1$. Então, para todo o número complexo s com $Re(s) > x$, tem-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n^s} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{Re(s)}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x} \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{y^x} dy = 1 + \frac{1}{x-1}$$

onde a última desigualdade se justifica pelo teste do integral. O teste de convergência de Weierstrass diz-nos que, nestas condições, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ é absolutamente convergente (em cada ponto s) e é uniformemente convergente na região dos complexos s com $Re(s) > x$. Agora, é consequência do teorema de Morera da análise complexa (ver (1) do apêndice no final desta secção), que a função zeta de Riemann ζ é holomorfa no domínio dos valores s com $Re(s) > 1$.

Riemann mostrou que é possível estender a função ζ a uma função holomorfa definida em $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ (também se diz que ζ tem uma *continuação holomorfa* ou *continuação analítica* a $\mathbb{C} \setminus \{1\}$). Aqui vamos mostrar apenas que ζ tem uma continuação holomorfa a $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 0 \text{ e } s \neq 1\}$.

Para $s \in \mathbb{C}$, com $Re(s) > 1$, tem-se:

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \int_1^{\infty} \frac{1}{y^s} dy = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{n^s} dy - \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{y^s} dy = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{y^s} \right) dy$$

Pelo teorema da diferenciação do integral paramétrico (regra de Leibniz) tem-se que, para cada número natural n, a função $s \rightsquigarrow \int_n^{n+1} (\frac{1}{n^s} - \frac{1}{y^s}) dy$ é holomorfa em $\mathbb{C}$. Também se tem, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $s \in \mathbb{C}$ com $Re(s) > 0$, a seguinte desigualdade (ver um exercício das folhas):

$$(\star) \qquad \int_n^{n+1} \left| \frac{1}{n^s} - \frac{1}{y^s} \right| dy \leq \frac{|s|}{n^{Re(s)+1}}$$

Note-se que para s número complexo com $Re(s) > 0$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s|}{n^{Re(s)+1}}$ é convergente (pois tem-se $Re(s) + 1 > 1$). Agora, usando o teste de convergência de Weierstrass aplicado a esta série e, novamente pelo teorema de Morera, conclui-se que a função

$$s \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{y^s} \right) dy$$

é holomorfa em $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 0\}$ (para mais detalhes, ver (2) do apêndice). Mostrámos, pois, que esta função é uma continuação holomorfa da função $s \rightsquigarrow \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ ao semi-plano de $\mathbb{C}$ de parte real positiva. Sai, obviamente, que a função

$$s \rightsquigarrow \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{y^s} \right) dy$$

é uma continuação holomorfa da função ζ à região $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 0 \text{ e } s \neq 1\}$. Como se vê, esta continuação holomorfa tem um polo simples em 1 de resíduo 1.

Podemos, portanto, considerar a função zeta de Riemann como uma função holomorfa em $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 0 \text{ e } s \neq 1\}$. Sabe-se que os zeros desta função estão intimamente ligados à distribuição dos números primos. Pela fórmula do produto de Euler, sabemos que a função zeta não tem zeros em $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 1\}$. A demonstração do teorema do número primo de Hadamard e de de la Vallée-Poussin baseia-se no facto crucial de que a função ζ também não tem zeros quando

$Re(s) = 1$ (é um exercício das folhas mostrar este facto). Assim, os zeros (não triviais) da função zeta de Riemann situam-se na *faixa crítica* $\{s \in \mathbb{C} : 0 < Re(s) < 1\}$. Apelidámos estes zeros de não triviais porque, quando se considera a continuação holomorfa de ζ a $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ (o que não estudámos) existem zeros de ζ em -2, -4, -6, ... , os chamados zeros triviais.

A *hipótese the Riemann* afirma que todos os zeros (não triviais) da função ζ têm parte real $\frac{1}{2}$. Este é talvez o problema em aberto mais importante da matemática atual.

Apêndice

O seguinte teorema é muito útil para mostrar que certas funções de variável complexa são holomorfas:

Teorema (Morera)**.** *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função contínua tal que $\oint_\gamma f(s)ds = 0$ para toda a curva fechada suave γ em Ω. Então f é uma função holomorfa em Ω.*

No enunciado acima, as curvas vêm munidas duma parametrização contínua que, no caso suave, têm também derivada contínua e diferente de zero, exceto talvez num número finito de pontos. Esta noção de curva parametrizada é muito geral. Para o teorema de Morera bastava, por exemplo, considerar curvas que são fronteiras de rectângulos cujos lados são paralelos aos eixos cartesianos.

Corolário 1. *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$ e $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções holomorfas de Ω para $\mathbb{C}$ a convergir uniformemente para a função f em subconjuntos compactos de Ω. Então f é holomorfa em Ω.*

Demonstração. Visto que cada f_k é contínua (é holomorfa) e f é limite uniforme dos f_k (em bolas fechadas de Ω), sabemos que f é contínua. Para toda a curva fechada suave γ em bolas fechadas de Ω, tem-se:

$$\oint_\gamma f(s)ds = \oint_\gamma \lim_k f_k(s)ds = \lim_k \oint_\gamma f_k(s)ds = \lim_k 0 = 0$$

pois, pela convergência uniforme (note que estamos numa bola fechada), a integração comuta com o limite (e, note-se, $\oint_\gamma f_k(s)ds = 0$, pois cada f_k é holomorfa). O resultado sai pelo teorema de Morera. □

Seguem-se justificações detalhadas de resultado que usámos nesta secção.

(1) Fixe-se x um número real maior do que 1. A sucessão $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de funções holomorfas definidas em $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > x\}$ pelas somas parciais $f_k(s) = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n^s}$ converge uniformemente em $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > x\}$ para a função ζ (teste de convergência de Weierstrass).

Dado que x é um real qualquer maior do que 1, vem que a sucessão $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente (para ζ) em subconjuntos compactos de $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 1\}$. Pelo Corolário acima, a função ζ é holomorfa no domínio $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 1\}$.

(2) O argumento de (1), agora aplicado à sucessão de funções holomorfas $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definidas em $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 0\}$ por $g_k(s) = \sum_{n=1}^k \int_n^{n+1} (\frac{1}{n^s} - \frac{1}{y^s})dy$, mostra que a função

$$s \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{y^s}\right) dy$$

é holomorfa em $\{s \in \mathbb{C} : Re(s) > 0\}$. O teste de convergência de Weierstrass aplica-se por causa de $(\star)$. Desta fórmula sai também que a convergência de $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uniforme em compactos.